Geometrická postupnosť

pr.

$\langle a_n \rangle$: 1; 2; 4; 8; 16; 32; …

$\langle b_n \rangle$: 18; 6; 2; $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{9}$; …

$\langle c_n \rangle$: 32; -48; 72; -108; 162; …

D. ***Postupnosť je geometrická***, ak podiel ľubovoľných dvoch za sebou idúcich členov je konštantný. Ten konštantný podiel sa volá ***kvocient geometrickej postupnosti*** (q).

$$\forall n \in \mathbb{N}: q = \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad q \in \mathbb{R}$$

P. Samozrejme ten podiel sa počíta tak, že vždy neskorší člen delíme predchádzajúcim členom postupnosti.

Ak upravíme vzťah – vyjadríme neskorší člen, potom vlastne dostaneme rekurentný vzťah na výpočet členov geometrickej postupnosti. Ďalší člen geometrickej postupnosti dostanem, ak vynásobím kvocientom predchádzajúci člen.

$$a_{n+1} = a_n.q$$

Ak ešte prenesiem kvocient na druhú stranu, potom dostanem:

$$a_n = \frac{a_{n+1}}{q}$$

To znamená, že predchádzajúci člen dostanem tak, že vydelím člen s kvocientom.

Vráťme sa k prvému tvaru a konkretizujme:

$$a_2 = a_1.q = a_1.q^1$$
$$a_3 = a_2.q = a_1q.q = a_1.q^2$$
$$a_4 = a_3.q = a_1q^2.q = a_1.q^3$$
$$a_5 = a_4.q = a_1q^3.q = a_1.q^4$$

Ak to zovšeobecníme, dostaneme prvý vzorec:

V. výpočet všeobecného (n-tého) člena postupnosti z prvého člena pomocou kvocientu

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

Takže ľubovoľný člen geometrickej postupnosti vieme vypočítať, ak poznáme prvý člen a kvocient.

Teraz vyjadrime iný (r-tý) člen postupnosti. Vyjadrime z toho prvý člen, čo potom ďalej dosadíme do prvého vzorca:

$$a_r = a_1.q^{r-1} \rightarrow a_1 = \frac{a_r}{q^{r-1}}$$

$$a_n = \frac{a_r}{q^{r-1}}.q^{n-1} = a_r.\frac{q^{n-1}}{q^{r-1}} = a_r.q^{n-1-(r-1)}$$

V. výpočet člena postupnosti z ľubovoľného iného člena pomocou kvocientu

$$a_n = a_r.q^{n-r}$$

Takže ľubovoľný člen geometrickej postupnosti vieme vypočítať, ak poznáme jeden člen a kvocient.

Ako „chápať" spolu tieto dva vzorce?
Keď počítame neskorší člen (s väčším indexom/poradovým číslom) geometrickej postupnosti zo skoršie (s menším indexom), potom násobíme toľkou mocninou kvocientu, o koľko neskoršie je ten hľadaný člen v poradí. Ak počítame skorší člen, potom delíme s tou mocninou kvocientu ten neskorší člen.

súčet prvých n členov postupnosti

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

vyjadríme každý člen pomocou prvého a q

$$s_n = a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + \ldots + a_1.q^{n-1} \qquad /.q$$
$$s_n.q = a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + \ldots + a_1.q^n \qquad /+ a_1$$
$$s_n.q + a_1 = a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + \ldots + a_1.q^{n-1} + a_1.q^n$$
$$s_n.q + a_1 = s_n + a_1.q^n \qquad /-s_n - a_1$$

separujeme členy podľa s_n

$$s_n.q - s_n = a_1.q^n - a_1$$

vyjmeme na obidvoch stranách

$s_n.(q - 1) = a_1.(q^n - 1)$ $\quad /:(q - 1)$

vyjadríme s_n

V. súčet prvých n členov geometrickej postupnosti

$$s_n = a_1.\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

A prečo dostala táto postupnosť práve ten názov geometrická? Zoberme tri za sebou idúce členy geometrickej postupnosti. Vyjadrime krajné dva pomocou prostredného člena:

$a_n;\ a_{n+1};\ a_{n+2}$

$$a_n = \frac{a_{n+1}}{q}$$

$$a_{n+2} = a_{n+1}.q$$

vynásobme rovnice

$$a_n.a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{q}.\ a_{n+1}.q$$

vykrátime s q pravú stranu a medzitým vymeníme strany

$$a_{n+1}.\ a_{n+1} = a_n.a_{n+2}$$

$$a_{n+1}^2 = a_n.a_{n+2} \qquad /\sqrt{\ }$$

odmocníme

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n.a_{n+2}}$$

V. Každý člen geometrickej postupnosti (okrem prvého) je geometrickým priemerom dvoch susedných členov.

príklad:

Napíšte prvých päť členov geometrickej postupnosti, ak:

a, $a_1 = 3;\ q = \frac{1}{4}$ $\quad$ b, $b_6 = 240;\ b_{10} = 3\,840$

a, ak násobíme člen s kvocientom, dostaneme ďalší člen postupnosti

$$a_2 = a_1.q = 3.\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$a_3 = a_2.q = \frac{3}{4}.\frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

$$a_4 = a_3.q = \frac{3}{16}.\frac{1}{4} = \frac{3}{64}$$

$$a_5 = a_4.q = \frac{3}{64}.\frac{1}{4} = \frac{3}{256}$$

---

b, vyjadríme neskorší člen pomocou skoršieho

$$b_{10} = b_6.q^4$$

$$3\,840 = 240.q^4 \qquad /:240$$

$$16 = q^4 \qquad /\sqrt[4]{\ }$$

$$2 = |q|$$

$q = 2$ $\qquad$ $q' = -2$

$$b_1 = \frac{b_6}{q^5} = \frac{240}{2^5} = \frac{15}{2} = 7{,}5$$

$$b_2 = b_1.q = 7{,}5.2 = 15$$

$$b_3 = 15.2 = 30$$

$$b_4 = 30.2 = 60$$

$$b_5 = 60.2 = 120$$

Určte zvyšné členy v konečnej geometrickej postupnosti, ak je dané:

$a_1 = 6;\ a_n = 24\,576;\ s_n = 49\,146$ $\qquad$ n, q

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

$$24\,576 = 6.q^{n-1} \qquad /:6$$

$$4\,096 = q^{n-1}$$

$$s_n = a_1.\frac{q^n-1}{q-1}$$

$$49\,146 = 6.\frac{q^n-1}{q-1} \qquad /:6$$

$$8\,191 = \frac{q^n-1}{q-1}$$

z prvej rovnice vyjadríme q^n násobením rovnice s q

$$4\,096 = q^{n-1} \qquad /.q$$

$$4\,096q = q^n$$

dosadíme do druhej rovnice

$$8\,191 = \frac{4\,096q-1}{q-1} \qquad /.(q-1)$$

odstránime zlomok a roznásobíme zátvorku

$$8\,191.(q-1) = 4\,096q - 1$$

$$8\,191.q - 8\,191 = 4\,096q - 1 \qquad /-4\,096q + 8\,191$$

separujeme členy podľa q

$$8\,191.q - 4\,096q = 8\,191 - 1$$

$$4\,095q = 8\,190 \qquad /:4\,095$$

$$q = 2$$

z prvej, upravenej rovnice vypočítame n

$$4\,096 = q^{n-1}$$

$$4\,096 = 2^{n-1} \qquad /\log$$

zlogaritmujeme rovnicu

$$\log 4\,096 = \log 2^{n-1}$$

$$\log 4\,096 = (n-1)\log 3 \qquad /:\log 2$$

$$\frac{\log 4\,096}{\log 2} = n - 1$$

$$12 = n - 1 \qquad /+1$$

$$13 = n$$

Vypočítajte prvý člen a kvocient geometrickej postupnosti, kde platí: $a_3 + a_4 - a_2 = 15$
$a_7 + a_8 - a_6 = 240$

vyjadríme každý člen pomocou prvého a kvocientu

$$a_1.q^2 + a_1.q^3 - a_1.q = 15$$

$$a_1.q^6 + a_1.q^7 - a_1.q^5 = 240$$

vyjmeme v prvej rovnici a_1, v druhej a_1q^3

$$a_1.q(q + q^2 - 1) = 15$$

$$a_1.q^3(q + q^2 - 1) = 240 \qquad /\frac{II.}{I.}$$

vydelíme druhú rovnicu s prvou – ľavú stranu s ľavou, pravú s pravou

$$\frac{a_1.q^3(q+q^2-1)}{a_1.q(q+q^2-1)} = \frac{240}{15}$$

po zjednodušení zlomkov

$$q^2 = 16 \qquad /\sqrt{}$$

$$|q| = 4$$

$q = 2$ $\qquad$ $q' = -2$

dosadíme do prvej upravenej rovnice

$$a_1.q(q + q^2 - 1) = 15$$

$$a_1.2(2 + 2^2 - 1) = 15$$

$$a_1.2(2 + 4 - 1) = 15 \qquad /:2$$

$$a_1.5 = \frac{15}{2} \qquad /:5$$

$$a_1 = \frac{3}{2}$$

$$a_1'.\,q'\left(q + q'^2 - 1\right) = 15$$

$$a_1'.(-2)(-2 + (-2)^2 - 1) = 15 \qquad /:(-2)$$

$$a_1'.(-2 + 4 - 1) = -\frac{15}{2}$$

$$a_1' = -\frac{15}{2}$$